الفصل الثاني

مفاهيم الإحتماليات وتطبيقاتها

بعد الإنتهاء من دراسة هذا الفصل سيكون القارئ قادراً على ما يلي:

- تعريف الإحتمالات ومناهجها
- توضيح المفاهيم الأساسية للإحتمالات وقواعدها
- تطبيق مفاهيم نظرية بايز للإحتمالات الشرطية

المقدمة

تصبح الحياة بسيطة عندما نستطيع ان بقدر بدرجة عالية من الدقة ما الذي سيحدث في المستقبل, وحيث أن نتيجة أي قرار تعتمد على فهم منطقي وعقلاني للبيئة المحيطة، فإنه إذا فشل متخذ القرار في البحث عن المعلومات المرتبطة بموضوع إتخاذ القرار وتحليلها ودراستها من أجل اتخاذ القرار المنطقي فإنه يخسر الكثير في السوق. فمن خلال التنبؤ الدقيق بالمستقبل، تستطيع الشركة أن تتجنب إضاعة الموارد وتستطيع إستغلال مواردها المتاحة بشكلٍ أفضل مما يعزز قدرتها التنافسية ويحسن وضعها في السوق.

مفهوم الإحتمالات

تعود بداية الإحتمالات كعلم الى القرن السادس عشر حيث بدأ الناس بمحاولة تحديد المخاطر في تفاصيل الحياة اليومية. كما بدأ التعبير عن إمكانية حدوث الأحداث بصورة كمية، فنقول ان هناك فرصة 60% لهطول الامطار في يوم كذا، وان فرصة فوز فريق كرة قدم على آخر هي 2:1، وان هناك 50% إحتمالية ان ترتفع قيمة سهم شركة ما الى أعلى مستوى على الإطلاق خلال الأسبوع القادم.

فالإحتمال هو تمثيل رقمي يعبر عن فرصة حدوث حدث ما في المستقبل. وقد تزايدت أهمية علم الإحتمالات في العصر الحاضر بإعتبارها من أهم الأدوات في حل الكثير من المشاكل في المجالات المختلفة والتي تتطلب تطبيق تقنيات التحليل الكمي.

قاعدتان اساسيتان

هناك قاعدتان أساسيتان للأحتمالات هما:

الأولى: إحتمال أي حدث هو قيمة رقمية بين الصفر والواحد، حيث تعني القيمة "صفر" الى ان الحدث مستحيلPossible event والقيمة "1" تعني أن الحدث مؤكد الحدوث Certain event.

الثانية: مجموع الإحتمالات الفردية لكل النتائجة الممكنة لحدثٍ ما تساوي "1".

مصطلحات عامة:

- **فضاء العينة Sample Space:** هي مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة عشوائية.
- **الحدث البسيط Simple Event**: هي أي نتيجة من نتائج التجربة الإحصائية.
- **الاحداث الشاملة Exhaustive Events:** هي الأحداث التي تمثل في مجموعها (إتحادها) فضاء العينة S. فنقول ان الاحداث A_1 و A_2 و....و A_n هي أحداث شاملة إذا كان

$$A_1UA_2U\dots UA_n=S\leftrightarrow p(A_1UA_2U\dots UA_n)=1$$

- **الاحداث المتنافية Mutually Exclusive Events**: هي الاحداث التي لا يمكن أن تحدث معاً. نقول ان الحدثين A_1 و A_2 متنافيان إذا تحقق ما يلي

$$A_1 \cap A_2 = \emptyset \leftrightarrow p(A_1 \cap A_2) = 0$$

حيث ø تمثل المجموعة الخالية أو الحدث المستحيل الحدوث والذي تكون إحتمالية حدوثه معدومة.

- **الاحداث المستقلة Independent Events:** هي الاحداث الغير مرتبطة ببعظها والتي لا يؤثر حدوث أحدها على إحتمالية حدوث الأحداث الأخرى.

نقول ان الحدثين A و B مستقلان إذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر على إحتمالية حدوث الآخر. ويُعبر عن ذلك كما يلي

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

$$p(A|B) = p(A)$$

مثال 1:

قامت كلية الإدارة والإقتصاد بجامعة قطر بتحليل سجلات الطلاب الذين درسوا مادة الطرق الكمية في صناعة القرار خلال السنوات العشر الماضية. وقد وجدوا أن عدد الطلاب الذين درسو المقرر هو 2,000 طالباً وطالبة وبإستخدام نظام التقديرات التالي (A,B+,B,C+,C, D+, D , and F) وكان توزيع تقديراتهم كما في الجدول التالي

التقدير	عدد الطلاب
A	350
B+	300
B	400
C+	410
C	320
D+	200
D	100
F	30
المجموع	2,110

فإذا تم إختيار أحد الطلاب بشكلٍ عشوائي فأوجد ما يلي:

A. إحتمالية أن يكون تقدير ذلك الطالب A

B. إحتمال ان يكون الطالب راسباً في المادة

C. إحتمالية أن يكون تقدير الطالب A أو +B

D. إحتمال أن يكون الطالب قد نجح في المادة

الحل:

نقوم أولاً بتطوير جدول التوزيع الإحتمالي بإيجاد الإحتمالات لكل تقدير

التقدير	عدد الطلاب	التكرار النسبي	الإحتمالات
A	350	350/2110	0.17
B+	300	300/2110	0.14
B	400	400/2110	0.19
C+	410	410/2110	0.19
C	320	320/2110	0.15
D+	200	200/2110	0.09
D	100	100/2110	0.05
F	30	30/2110	0.01
المجموع	2,110	2110/2110=1	1.00

A. بناءً على التوزيع الإحتمالي في الجدول فيمكن القول أنه إذا تم إختيار احد الطلاب بصورة عشوائية فإن إحتمالية ان يكون قد حصل على تقدير A هي 17% كما يوضح العمود الرابع في الجدول السابق.

B. بالمثل يمكن بناءً على الجدول السابق الإستنتاج ان إحتمالية ان يكون الطالب الذي تم إختياره بشكل عشوائي من 2110 طلاب الذين درسوا مادة الطرق الكمية في صناعة القرار راسباً هي 1%.

أنواع الاحتمالات :

هناك طريقتان مختلفتان لتحديد الاحتمالات: المنهج الموضوعي والمنهج الذاتي.

1- المنهج الموضوعي: Objective Approach

ويمكن ان يكون بإحدى طريقتين:

الطريقة الأولى: التكرار النسبي Relative Frequency

والذي يتم فيه تحديد الاحتمالات بناءً على التكرار النسبي للنتائج كما في المثال 1.

الطريقة الثانية: الطريقة المنطقية او التقليدية:

وتُسمى أيضاً الطريقة المنطقية لتحديد الإحتمالات، والتي تقتضي ان إحتمالية حدوث نتيجة محددة لحدثٍ ما هو التكرار النسبي لعدد إمكانيات حدوث تلك النتيجة لذلك الحدث الى عدد كل النتائج الممكنة.

$$\text{إحتمالية الحدث}(p) = \frac{\text{عدد مرات حدوث ذلك الحدث}}{\text{إجمالي عدد التجارب أو النتائج}}$$

مثال 2

في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة، حيث أن لدينا صورة (H) او كتابة (T)، فتكون إحتمالية الحصول على صورة كما يلي

$$\text{إحتمالية الحصول على صورة}(H) = \frac{\text{عدد الصور في القطعة}}{\text{عدد كل الإمكانات}}$$

$$\text{إحتمالية الحصول على صورة}(H) = \frac{1}{2}$$

حيث 1 هو عدد الصور الممكنة نتيجة إجراء التجربة، و 2 هو عدد الإمكانات المتاحة كنتائج لتلك التجربة.

2- المنهج الذاتي او الأحتماليات الذاتية Subjective Approach

عندما لا يكون من الممكن إستخدام المنطق والبيانات التاريخية في تحديد الإحتمالات، فيمكن تقييم الإحتمالات بإستخدام المنهج الذاتي. وتعتمد دقة الاحتمالات الذاتية على خبرة وحكمة الشخص الذي يقوم بتلك التقديرات.

على سبيل المثال، عندما يكون الهدف هو تقدير أحتمالية أن يكون سعر برميل النفط أعلى من 120$ في العام القادم؟ او يكون الهدف هو تحديد إحتمالية أن يكون الاقتصاد العالمي في حالة ركود حاد في عام2025؟ فسيكون تحديد تلك الإحتمالات معتمداً بدرجةٍ أساسية على المنهج الذاتي الذي يعتمد على خبرة الشخص ومعرفته وتقديره للأمور وبصيرته في النظر للأوضاع المعقدة.

هذا النوع من الاحتمالات الذاتية شائع في عالم الأعمال. حيث يجب على صناع القرار في كثير من الأحيان تحديد فرص النجاح أو الفشل. فمثلاً، سيكون مطلوباً من القائد لشركةٍ ما تقدير احتمال تحقيق حصة سوقية أو ربح معين في السوق، واحتمال وجود مستوى من الطلب على المنتجات او الخدمات الخاصة بالشركة، أو ما شابه ذلك دون الاستفادة من البيانات التاريخية السابقة. على الرغم من أنه قد

لا يكون هناك توافق في الآراء بشأن دقة التقدير الذاتي، كما هو الحال مع الإحتمال الموضوعي المتعلق بإحتمال الحصول على صورة عند رمي قطعة النقود وهي 50%، فإن تقدير الاحتمالات الذاتية غالبا ما يكون الوسيلة الوحيدة المتاحة لإجراء تقديرات احتمالية.

هناك عدة طرق لأجراء تقييمات الاحتمالية الذاتية منها إستخدام أستطلاع الرأي او طريقة دلفي او غيرها.

مثال3:

في تجربة إلقاء حجر النرد المتوازن الذي له ستة أوجه مرقمة من 1 الى 6، يمكن حصر النتائج مع إحتمالاتها كما في الجدول التالي.

الوجه	الإحتمال
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
4	$\frac{1}{6}$
5	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

مثال4:

سلة تحتوى على 3 كرات سوداء و 7 كرات خضراء. فإذا تم سحب كرة من السلة مع الإعادة ثم يتم سحب كرة أخرى ، فأوجد الإحتمالات التالية:

1. ان يتم سحب كرة سوداء فى السحب الأول.
2. ان يتم سحب إثنين من الكرات الخضراء.
3. ان يتم سحب كرة سوداء فى السحب الثانى إذا كان السحب الأول أخضر.
4. ان يتم سحب كرة خضراء فى السحب الثانى إذا كان السحب الأول أخضر.

الحل:

B=Black = أسود ، G= Green =أخضر

1. إحتمالية ان يتم سحب كرة سوداء فى السحب الأول

$$P(B) = \frac{3}{10} = 0.30$$

2. إحتمالية ان يتم سحب إثنين من الكرات الخضراء في السحبين الأول والثاني

$$P(GG) = P(G) \times P(G) = (0.7)(0.7) = 0.49$$

(وهذا احتمال مشترك لحدثين مستقلين.)

3. إحتمالية ان يتم سحب كرة سوداء فى السحب الثانى إذا كان السحب الأول كرة خضراء

$$P(B\backslash G) = P(B) = 0.30$$

(وهذا إحتمال شرطى ولكن يساوي الثانوى لأن كلا السحبين هما حدثان مستقلان).

4. إحتمالية ان يتم سحب كرة خضراء فى السحب الثانى إذا كان السحب الأول كرة خضراء

$$P(G\backslash G) = P(G) = 0.70$$

(وهذا إحتمال مشروط ولكن الحدثين مستقلان.

الاحداث المرتبطة إحصائياً Statistical Dependent Events

عندما تكون الاحداث مرتبطة إحصائياً، فإن حدوث احدها يؤثر على إحتمال حدوث الأحداث الأخرى. و الإحتمالات الثانوية Marginal و الشرطية Conditional و المشتركة Joint تكون موجودة للأحداث المرتبطة او المستقلة ، غير أن القوانين المستخدمة قد تتغير.

و يشار إلى الإحتمال الثانوى لحدوث الحدث A بالرمز P (A) .

كما أن حساب الإحتمال الشرطي في حالة الأحداث المرتبطة هو أكثر شيوعاً مما هو عليه في حالة الاحداث المستقلة. و يتم صياغة الإحتمال الشرطى للحدث A ، بشرط حدوث الحدث B ، كما يلى :

$$P(A\backslash B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

وعليه تكون صيغة الاحتمال المشترك هى

$$P(AB) = P(A\backslash B)\, P(B)$$

مثال 5:

الإحتمالات الشرطية عندما الأحداث غير مستقلة (مرتبطة)

نفترض أن لدينا وعاء يحتوي على 10 كرات بالأوصاف التالية:

4 كرات باللون الأبيض (W) و حرف (L).

كرتين باللون الأبيض (W) و مرقمه (N).

3 كرات باللون الأصفر (Y) و حرف (L).

كرة باللون الأصفر (Y) و مرقمه (N).

إذا قمت بسحب كرة بشكلٍ عشوائي ووجدت أن لونها أصفر، فما هو إحتمال أن تكون الكرة مكتوب عليها حرف (L) ؟

الحل

و بما أن هناك 10 كرات، فإنه يمكن إستخلاص المعلومات المعطاة كما يلي:

$p(YL) = 3/10 = 0.3 \qquad p(WL) = 4/10 = 0.4$

$p(YN) = 1/10 = 0.1 \qquad p(WN) = 2/10 = 0.2$

$p(W) = 6/10 = 0.6, \quad$ or $p(W) = p(WL) + p(WN) = 0.4 + 0.2 = 0.6$

$p(L) = 7/10 = 0.7 \quad$ or $p(L) = p(WL) + p(YL) = 0.4 + 0.3 = 0.7$

$p(Y) = 4/10 = 0.4 \quad$ or $p(Y) = p(YL) + p(YN) = 0.3 + 0.1 = 0.4$

$p(N) = 3/10 = 0.3 \quad$ or $p(N) = P(WN) + P(YN) = 0.2 + 0.1 = 0.3$

يمكننا الآن حساب الإحتمال الشرطى أن الكرة المسحوبة مكتوب عليها حروف علماً أنها باللون الأصفر بالصيغة التالية:

$$p(L\backslash Y) = \frac{p(LY)}{p(Y)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

وبالتالي فإن إحتمالية كون الكرة المسحوبة عليها حروف علماً بأنها صفراء هي 75%.

مثال 6

الإحتمالات المشتركة عندما تكون الاحداث مرتبطة

يخبرك السمسار الخاص بك أنه إذا وصل سوق الأسهم إلى مستوى 12,500 نقطة بحلول يناير، فهناك إحتمال بنسبة 70٪ أن شركة توبيليس للإلكترونيات سوف ترتفع فى القيمة. شعورك الخاص هو أن هناك فرصة 40٪ فقط من متوسط السوق لتصل إلى 12,500 نقطة بحلول يناير. هل تستطيع حساب إحتمال أن كلا من سوق الأوراق المالية سوف تصل إلى 12,500 نقطة وسعر شركة توبيليس للإلكترونيات سوف يرتفع؟

الحل

نفترض أن M تمثل حدث ارتفاع سوق الأوراق المالية إلى مستوى 12,500 نقطة ، و نفترض أن T تمثل حدث ارتفاع قيمة شركة توبيليس للإلكترونيات. فيكون المطلوب هو حساب الإحتمالات التالية

$$p\ (MT)$$

وحيث ان المعطيات هي

$$P(T\backslash M)= 0.70\ ,\ p(M)=0.40$$

فتكون الإحتمالات المطلوبة كما يلي

$$p\ (MT) = p\ (T\backslash M)\ X\ p\ (M) = (0.70)\ (0.40) = 0.28$$

وبالتالى، فهناك فقط إحتمالية 28٪ أن سوق الأوراق المالية سوف تصل إلى 12,500 نقطة وسعر شركة توبيليس للإلكترونيات سوف يرتفع.

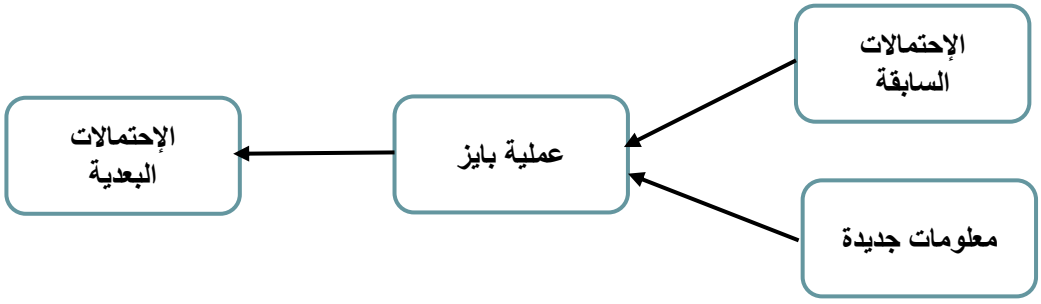
حساب الإحتمالات مع نظرية بايز Bayes' Theorem

في الإحصاء ونظرية الاحتمالات، تُعتبر نظرية بايز (المعروفة أيضا باسم قاعدة بايز) هي صيغة رياضية تستخدم لتحديد الاحتمال الشرطي للأحداث. في الأساس ، تصف نظرية بايز احتمال وقوع حدث بناء على المعرفة المسبقة بالظروف التي قد تكون ذات صلة بالحدث. وقد سُميت النظرية على اسم الإحصائي الإنجليزي توماس بايز الذي اكتشف الصيغة في عام 1763. وتُعتبر هذه النظرية هي أساس نهج الاستدلال الإحصائي الخاص المسمى استدلال بايز.

إلى جانب الإحصاء ، تستخدم نظرية بايز أيضاً في تخصصات كثيرة ، مثل الطب والصيدلة وغيرها. بالإضافة إلى ذلك ، يتم استخدام النظرية بشكل واسع في مجالات التمويل المختلفة. وتشمل بعض التطبيقات

على سبيل المثال لا الحصر، نمذجة مخاطر إقراض المال للمقترضين أو التنبؤ باحتمال نجاح الاستثمار. كما تُعتبر أساساً نظرياً في علم المكائن المتعلمة Machine Learning والذكاء الإصطناعي Artificial Intelligegence وعلوم الكمبيوتر Computer Science.

يتم إستخدام نظرية بايز من خلال دمج معلومات إضافية بمجرد توفرها بما يتيح تقدير الإحتمالات البعدية. وهذا يعنى أننا نستطيع أن نستعمل بيانات جديدة أو حديثة، ثم يتم مراجعة وتحسين التقديرات الإحتمالية القديمة لحدث ما.



مثال 7

كوب يحتوى على حجري نرد متطابقين فى المظهر. ولكن إحدهما متوازن Fair والآخر غير متوازن Loaded. إحتمال الحصول على الوجه رقم 3 في تجربة إلقاء حجر النرد المتوازن هي 6/1 ، أو 0.166 , و احتمال الحصول على الوجه رقم 3 في تجربة إلقاء حجر النرد الغير متوازن هي 0.60. فإذا تم إختيار أحد حجري النرد عشوائياً وإلقائه وظهر الوجه ذو الرقم 3، فما هي إحتمالية ان يكون ذلك الحجر هو المتوازن؟

الحل

من أجل إيجاد الإحتمالية المطلوبة سنقوم بإستخدام صيغة الإحتمالات المشتركة للاحداث المرتبطة إحصائياً و نظرية بايز. من خلال معطيات السؤال نستخرج الإحتمالات التالية:

حجر النرد المتوازن= Fair

حجر النرد الغير متوازن= Loaded

p (Fair) =p (Loaded) = 0.50

لدينا أيضاً من المعطيات

$$p(3\backslash Fair) = \frac{1}{6} = 0.1667 \text{ , } p(3\backslash Loaded) = 0.6$$

فتكون الإحتمالات المطلوبة هي

$$p\ (Fair\backslash 3)$$

بإستخدام نظرية بايز والإحتمالات المشتركة في القانون

$$P\ (AB) = P\ (A\backslash B)\ X\ P\ (B)$$

سنوجد $p\ (Fair\backslash 3)$ بالعلاقة التالية

$$p\ (Fair\backslash 3)= \frac{p\ (\ Fair\ and\ 3)}{p\ (3)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

سنقوم بإيجاد $p\ (Fair\ and\ 3)$ و $p\ (3)$ ونعوض في العلاقة (*)

p (Fair and 3)= p (3 and Fair)= p (3\ Fair) p (Fair)= 0.1667*0.5=0.08335

p(Loaded and 3)=p(3 and Loaded)=p(3\Loaded)*p (Loaded)=0.6*0.5=0.3

وبالتالي يكون

p (3) = p (3 and fair) + p (3 and loaded)=0.08335+0.3=0.38335

بالتعويض في العلاقة (*) نجد ان الإحتمالية المطلوبة

$$p\ (Fair\backslash 3)= \frac{0.08335}{0.38335} =0.22$$

وبالمثل يمكن القول انه إذا ظهر الوجه الذي يحمل الرقم 3 فإن إحتمالية ان يكون حجر النرد الذي تم إلقاؤه هو الغير متوازن ستكون

$$p\ (loaded\ \backslash 3) = \frac{P(loaded\ and\ 3)}{P(3)} = \frac{0.300}{0.383} = 0.78$$

و يطلق على هذين الإحتماليين المشروطين بالإحتمالات المعدلة أو اللاحقة والتي تم فيها إستيعاب المعلومات المستجدة والإستفادة منها.

قبل أن يتم إلقاء حجر النرد في المثال السابق، كان أفضل ما يمكن قوله أن هناك إحتمالية 50% أن يكون الذي تم إلقاؤه هو المتوازن ومثلها إحتمالية الغير متوازن. ولكن بعد الحصول على معلومة (تتمثل في ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 3) أصبحنا قادرين على مراجعة الإحتمالات بحيث يمكن القول أن هناك إحتمال 0.78 أن حجر النرد الذي تم إلقاؤه هو الغير متوازن و هناك إحتمالية 0.22 ان يكون الحجر الذي تم إلقاؤه هو المتوازن.

نموذج عام لنظرية بييز General Bayes' Rule

إذا كان لدينا الأحداث A_1 و A_2 و .... و A_n شاملة (أن أنها تشكل فضاء العينة S) ومتنافية مثنى مثنى ($A_i \cap A_j = \emptyset$ لكل i و j و $i \neq j$) . إذا كان الحدث B هو الحدث الذي يحدث إما مع A_1 أو A_2 .... أو A_n فبناءً على نظرية بايز يكون

$$p\ (A_i \backslash B) = \frac{p\ (B \backslash A_i) p\ (B)}{\sum_{k=1}^{n} p\ (B \backslash A_k) p\ (B)} \quad i=1,2,\ldots,n \ldots (**)$$

حيث

$p\ (A_i \backslash B)$: إحتمالية حدوث الحدث Ai علماً بان الحدث B قد وقع

$p\ (B \backslash A_i)$: إحتمالية حدوث الحدث Bعلماً بان الحدث Ai قد وقع

$p\ (B)$: إحتمالية حدوق الحدث B

كحالة خاصة إذا كان لدينا S= A U A' وكان لدينا الحدث B فيمكن تطبيق نظرية بايز في (**) كما يلي

$$p\ (A \backslash B) = \frac{p\ (B \backslash A) p\ (B)}{p\ (B \backslash A) p\ (B) + p\ (B \backslash A') p\ (B)}$$

حيث:-

A'= مكمل الحدث A

أسئلة

السؤال 1

إذا كنت محللاً مالياً في بنك استثماري. وفقاً لبحثك عن الشركات المتداولة ، فإن 60٪ من الشركات التي رفعت سعر أسهمها بأكثر من 5٪ في السنوات الثلاث الماضية قد قامت بتغيير رؤسائها التنفيذيين خلال هذه الفترة. في نفس الوقت، فإن 35٪ فقط من الشركات التي لم ترفع سعر أسهمها بأكثر من 5٪ في الفترة نفسها قد قامت بتغيير رؤسائها التنفيذيين. فإذا علمت أن احتمال نمو أسعار الأسهم بأكثر من 5٪ هو 4٪ ،

فأوجد إحتمالية أن أسهم الشركة التي تقوم بتغيير رئيسها التنفيذي ستزيد بأكثر من 5٪.

السؤال 2

صندوق يحتوي على 8 شرائح حمراء و 10 شرائح خضراء و شريحتين بيضاوين. يتم سحب شريحة واستبدالها ، ثم يتم سحب شريحة أخرى. ما هو احتمال الحصول على

A. شريحة بيضاء في السحب الأول؟

B. شريحة بيضاء في السحب الأول وحمراء في السحب الثاني؟

C. شريحتين خضراوين؟

D. شريحة حمراء في السحب الثاني، إذا علمت ان الشريحة كانت بيضاء في السحب الاول؟

السؤال 3

إذا كانت إحتمالية النجاح يف مادة مبادئ اإلدارة هي 4.0 وإحتمالية النجاح يف مادة الطرق الكمية لصناعة القرار مبعلومية النجاح يف مقرر مبادئ اإلدارة هي 7.0 ,فإذا علمت أن النجاح يف أحد املقررين ال يؤثر على النجاح يف املقرر اآلخر. فما إحتمال النجاح في كليهما.

السؤال 4

تذهب أسماء إلى المدرسة بالحافلة، وإذا فاتتْها، تذهب سيرًا. احتمال أن تلحق بالحافلة في أي يوم هو 0.4. إذا لحقت بالحافلة، سيكون احتمال أن تصل المدرسة في الميعاد 0.8، لكن إذا فاتتْها الحافلة ووجب عليها أن تذهب سيرًا، سيقل احتمال وصولها في الميعاد إلى 0.6.

A. أوجد احتمال أن تلحق بالحافلة وتصل المدرسة في الميعاد في أحد الأيام.

B. أوجد احتمال أن تصل المدرسة في الميعاد في أحد الأيام، سواء لحقت بالحافلة أم لم تلحق بها.

C. من ثم، أوجِد احتمال أن تتأخر عن المدرسة في أحد الأيام.

السؤال 5

يحضر 240 طالباً دروسًا في علوم الكيمياء والاحياء. يدرس منهم 104 طالباً الكيمياء، و132 طالباً يدرسون الأحياء، و68 منهم يدرسون المادتين معًا. ما احتمال وجود طالب يدرس الكيمياء، علماً أنه يدرس الأحياء؟

السؤال 6

في أحد الشوارع، يوجد 10 بيوت فيها قطط ، و8 بيوت فيها كلاب ، و3 بيوت فيها قطط وكلاب، و7 بيوت لا يوجد فيها لا قطط ولا كلاب. إذا تم إختيار بيت بطريقة عشوائية فأوجد

A. احتمال ان يكون فيه قطط وكلاب.

B. احتمال ان يكون فيه إمَّا قطط أو كلاب أو كلاهما.

C. إحتمال ان يكون فيه كلاب إذا علمت أن فيه قطط.

السؤال 7

في ساحة السيارات المستعملة، 70 %من السيارات تمتلك AC (مبرد هواء) و40 % منها تمتلك جهازCD (مشغل الأقراص) و20 % من السيارات تمتلك CD و AC معا... ما هو احتمال ان تمتلك السيارهCD حيث انها لا تمتلك AC ؟

السؤال 8

كيس يحتوي على 6 كرات زرقاء و 4 كرات حمراء إذا سحبت كرة عشوائيا مع الإعادة، ثم قمت بسحب كرة ثانية فأوجد

A. احتمال أن تكون الكرتان حمراوان في المرتين؟

B. ما احتمال أن تكون الكرتان زرقاوان في المرتين؟

C. ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

D. ما احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

السؤال 9

كيس يحتوي على 6 كرات زرقاء و 4 كرات حمراء إذا سحبت كرة عشوائيا بدون إعادة، ثم قمت بسحب كرة ثانية فأوجد

A. احتمال أن تكون الكرتان حمراوان في المرتين؟

B. ما احتمال أن تكون الكرتان زرقاوان في المرتين؟

C. ما احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية زرقاء؟

D. ما احتمال أن تكون إحداهما حمراء والأخرى زرقاء؟

السؤال 10

في تجربة سحب كرة عشوائيا من صندوق يحتوي على 10 كرات خضراء تحمل الأرقام من 1 إلى 10، 9 كرات بيضاء تحمل الأرقام الفردية من 1 إلى 9. إذا قمت بسحب كرة عشوائياً من الصندوق فوجدت إنها خضراء، فما هو احتمال أنها تحمل الرقم 8؟

السؤال 11

إذا رسب 25% من طلبة الكلية في مادة الرياضيات، ورسب 10% منهم في الرياضيات والإدارة الكيميا معاً.
إذا تم إختيار طالب بصورة عشوائية، فما هو إحتمال رسوبه في مادة الإدارة إذا كان راسباً في مادة الرياضيات؟

السؤال 12

تحتوي حقيبة على 6 قِطَع حلوى حمراء و5 قِطَع حلوى زرقاء. نأخذ قطعة عشوائية، ونُلاحِظ لونها، ونأكلها، ثم نُكرّر هذه العملية مع قطعة أخرى. هل «الحصول على قطعة حلوى زرقاء أولًا» ثم «الحصول على قطعة حلوى حمراء ثانيًا» حدثان مستقلان؟

السؤال 13

إناء به كرات يحتوي على 6 كرات زرقاء، و7 كرات حمراء، وكرتين خضراوين، و3 كرات سوداء. اختيرت كرة عشوائيًّا من الإناء مع الإعادة وتم إختيار كرة أخرى. أوجد احتمال أن تكون الأولى زرقاء والثانية حمراء.

السؤال 14

في أيٍّ من السيناريوهات التالية يكون الحدثان A و B حدثين مستقلين؟

- أُلقِيَ حجر نرد وعملة معدنية. الحدث Aهو الحصول على العدد 6 على حجر النرد، والحدث B هو استقرار العملة وظهور وجه الصورة.
- غادر طالب أو طالبة منزله في طريقه إلى المدرسة. الحدث Aهو وصوله — أو وصولها — إلى محطة الحافلات في الوقت المُحدَّد من أجل اللحاق بالحافلة، والحدث B هو الوصول إلى المدرسة في الوقت المُحدَّد.
- أخذ طفل قطعتَيْن من الحلوى عشوائيًّا من حقيبة تحتوي على قطع حلوى للمضغ، وقطع حلوى مقرمشة. الحدث Aهو الحصول على حلوى المضغ في المرة الأولى، والحدث B هو الحصول على حلوى مقرمشة في المرة الثانية.
- اختار مدرسٌ طالبَيْن عشوائيًّا من مجموعة تحتوي على عشرة طلاب وخمس طالبات. الحدث Aهو اختيار المدرس أحد البنين في المرة الأولى، والحدث B هو اختيار المدرس إحدى البنات في المرة الثانية.
- أُلقِيَ حجر نرد. الحدث Aهو الحصول على عدد زوجي، والحدث B هو الحصول على عدد أوَّلي

السؤال 15

احتمال أن تُمطِر السماء في أحد الأيام هو 0.6. إذا أمطرت، فإن احتمال لَعِب مجموعة من الأصدقاء لكرة القدم يكون 0.2. إذا لم تمطر، فإن احتمال لَعِبهم لكرة القدم يزداد إلى 0.8.

A. أوجد احتمال أن تمطر في ذلك اليوم وأن يلعب الأصدقاء كرة القدم.

B. أوجد احتمال ألَّا تمطر في ذلك اليوم وأن يلعب الأصدقاء كرة القدم.

C. ما احتمال لَعِب الأصدقاء لكرة القدم في ذلك اليوم؟

السؤال 16

تُصنِّع إحدى الشركات منتجًا في مصنعين مختلفين هما M_1 و M_2. تُزوِّد الشركة ثلاثة عملاء C_1 و C_2 و C_3 بالتساوي، فتُزوِّد كلَّ عميل منهم بعدد 80 وحدة في الشهر. يُنتِج M_1 شهريًّا من هذا المنتج 10 وحدات، وتوزِّع الشركة هذه الكمية على العُمَلاء الثلاثة C_1 و C_2 و C_3 حسب النِّسَب المئوية 20% و 30% و 50% على الترتيب. إذا اخترتَ وحدة عشوائيًّا من منفذ العميل C_3، فأوجد احتمال أن تكون هذه الوحدة من إنتاج M_2.

السؤال 17

تحتوي حقيبة على 5 كرات وردية، و6 كرات برتقالية، و7 كرات صفراء. اختيرت كرتان بدون إعادة. باستخدام مُخطَّط الشجرة البيانية، أوجد احتمال أن تكون الكرة الثانية صفراء إذا كانت الكرة الأولى ليست صفراء.